配平方法，初等变换法，

Q 正定二次型 $\Leftrightarrow Q(x_1\cdots x_n)>0 \quad \forall (x_1\cdots x_n)\neq 0$.

Q 正定 $\overset{①}{\Leftrightarrow}$ Q 的(或 A 的)正惯性指数为 n

$\Leftrightarrow$ A 正定.

$\Leftrightarrow$ A 相合于单位矩阵.

性质：设 A 为 n 阶实对称方阵

1) P 可逆，$B=P^TAP$，则 $B>0 \Leftrightarrow A>0$. （相合不变性）

2) $A>0 \Leftrightarrow \exists$ 可逆 P s.t. $A=P^TP$. （相合标准形）

3). $A>0 \Rightarrow \det(A)>0$.

证：1). $A>0 \Rightarrow \forall x\neq 0 \quad (Px)^TA(Px)>0$ （因为 $Px\neq 0$）

$\Rightarrow \forall x\neq 0 \quad x^T(P^TAP)x>0$

$\Rightarrow P^TAP>0$.

2). $\Rightarrow$) 定理

$\Leftarrow$) $A=P^TP \Rightarrow \forall x\neq 0 \quad x^TAx=x^TP^TPx=|Px|^2>0$

$\Rightarrow A>0$.

3). $\det A=\det(P^TP)=(\det P)^2>0$.

定理：实对称阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 各阶顺序主子式均大于零．即

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \cdots\cdots \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\det A>0.$$

证：$\Rightarrow$)：　A 正定 $\Rightarrow \forall r=1,\cdots,n$　　二次型

$$Q_r(x_1\cdots x_r) := Q(x_1,\cdots,x_r,0\cdots 0)$$

正定. 因此 A 的 r 阶顺序主子式大于零

$\Leftarrow$)：对 n 归纳. $n=1$ ✓ 假设 $n-1$ ✓

$$A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ C^T & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \left(A_{n-1}>0 \Rightarrow P_{n-1}^T A_{n-1} P_{n-1} = I_{n-1} \quad (P_{n-1} \text{ 可逆}) \right)$$

$$R := \begin{pmatrix} P_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R^TAR = \begin{pmatrix} P_{n-1}^T & 0 \\ -C^TA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ C^T & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & \underbrace{a_{nn}-C^TA_{n-1}^{-1}C}_{=:a} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A)(\det R)^2 = a$$

$$\det A > 0 \Rightarrow a>0 \Rightarrow R^TAR>0 \Rightarrow A>0$$

$$\begin{pmatrix} (P_{n-1}^{-1})^T\cdot P_{n-1}^{-1} & C \\ C^T & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1 P_{n-1}]{P_{n-1}^T r_1} \begin{pmatrix} I_{n-1} & P_{n-1}^T C \\ C^T P_{n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & a_{nn}-C^TA_{n-1}^{-1}C \end{pmatrix} \xleftarrow[c_1(-P_{n-1}^TC)\to c_2]{-C^TP_{n-1}r_1+r_2}$$

②

例：判断 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$ 正定性

解：$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$ $\quad 1>0 \quad \begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1>0 \quad \begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix}=1>0 \quad \Rightarrow A>0$.

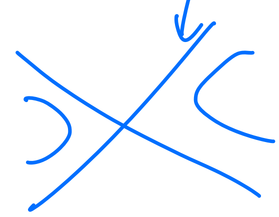
根据正负惯性指数命名二次型.

1) 正定 $\Leftrightarrow r=n \quad (\Rightarrow s=0)$
2) 半正定 $\Leftrightarrow r\leqslant n,\ s=0$.
3) 负定 $\Leftrightarrow s=n \quad (\Rightarrow r=0)$
4) 半负定 $\Leftrightarrow r=0,\ s\leqslant n$
5) 不定 $\Leftrightarrow r\geqslant 1,\ s\geqslant 1$.

部分关于正定的结论可平移到半正定，负定，半负定二次型上.

§8.4 二次曲线与曲面的分类

退化



椭圆: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

双曲线: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

抛物线: $y=ax^2$

} 二次曲线标准形式

一般的平面二次曲线:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0$$

$$A:=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

定理: 任意平面二次曲线均可经过旋定合适的直角坐标系变为标准形式.

证: 定理 $\Rightarrow$ $\exists$ 二阶正交矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 变换 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ 可 消去交叉项 且保持曲线形状

$\Rightarrow$ 原方程化为 $\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+2b_1'x'+2b_2'y'+c'=0$

$A\neq 0 \Rightarrow \lambda_1\neq 0$ or $\lambda_2\neq 0$ (不妨设 $\lambda_1\neq 0$)

坐标轴平移 $\tilde{x}=x'+b_1'/\lambda_1$,

$$\tilde{y}=\begin{cases} y'+b_2'/\lambda_2 & \lambda_2\neq 0 \\ y' & \lambda_2=0 \end{cases}$$

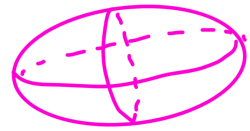
1° 椭圆型 $(\lambda_1\lambda_2>0)$ $\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2=\lambda_3$

2° 双曲型 $(\lambda_1\lambda_2<0)$ $\lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2=\lambda_3$

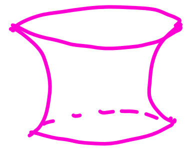
3° 抛物型 $(\lambda_1\lambda_2=0)$ $\lambda_1\tilde{x}^2+2\tilde{b}_2\tilde{y}+\tilde{c}=0$

二次曲面.

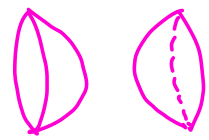
椭球面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



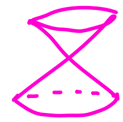
单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



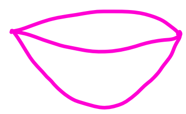
双叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



二次锥面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

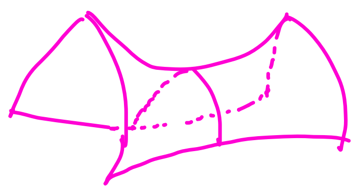


椭圆抛物面: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$



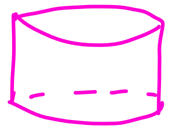
双曲抛物面: $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

马鞍面

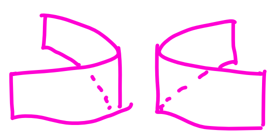


二次柱面 (方程中不含第三个变量).

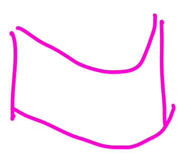
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



$y=ax^2$



一般二次曲面:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0$$

定理：一个一般二次曲面可经选择合适的直角坐标系变为标准形式。

证明： $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \exists$ 正交阵 P s.t.

$$P^TAP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

一：做正交变量替换 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2+2b_1'x'+2b_2'y'+2b_3'z'+c'=0$$

$A\neq 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 不全为零

二：分类讨论：

1° $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0 \Rightarrow \lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2+\lambda_3\tilde{z}^2=\lambda_4$

$1'$ $\lambda_4\neq 0 \Rightarrow \dfrac{\tilde{x}^2}{\frac{\lambda_4}{\lambda_1}}+\dfrac{\tilde{y}^2}{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}}+\dfrac{\tilde{z}^2}{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}}=1$

$2'$ $\lambda_4=0 \Rightarrow \dfrac{\tilde{x}^2}{\frac{1}{\lambda_1}}+\dfrac{\tilde{y}^2}{\frac{1}{\lambda_2}}+\dfrac{\tilde{z}^2}{\frac{1}{\lambda_3}}=0$

2° $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 两个非零（不妨设 $\lambda_1\lambda_2\neq 0$，$\lambda_3=0$）$\Rightarrow \lambda_1\tilde{x}^2+\lambda_2\tilde{y}^2=\tilde{b}_3\tilde{z}+c$

$1'$ $\tilde{b}_3\neq 0$（可设 $c=0$）$\Rightarrow \tilde{z}=\dfrac{\tilde{x}^2}{\frac{\tilde{b}_3}{\lambda_1}}+\dfrac{\tilde{y}^2}{\frac{\tilde{b}_3}{\lambda_2}}$

$2'$ $\tilde{b}_3=0, c\neq 0 \Rightarrow \dfrac{\tilde{x}^2}{\frac{c}{\lambda_1}}+\dfrac{\tilde{y}^2}{\frac{c}{\lambda_2}}=1$

3' $\tilde{b}_3 = 0 = c \Rightarrow$ 两平面的并.

3° $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 仅一个非零 (不妨设 $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$)

$$\Rightarrow \lambda_1 \tilde{x}^2 = \tilde{b}_2 \tilde{y} + \tilde{b}_3 \tilde{z}$$

1' $\tilde{b}_2 \neq 0$ or $\tilde{b}_3 \neq 0 \Rightarrow \tilde{y}' = a \tilde{x}'^2$

2' $\tilde{b}_2 = 0$ or $\tilde{b}_3 = 0 \Rightarrow \tilde{x}^2 = 0 \Rightarrow$ 两重平面.

例 $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 8xz - 4yz - 1 = 0$

解 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1° 找正交阵 P s.t. $P^TAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad P^TAP = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$$

2° $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow 5x'^2 + 5y'^2 - 4z'^2 = 1.$

$\Rightarrow$ 单叶双曲面.

另解：(配方法)

$$\Rightarrow (x - 2y - 4z)^2 - 15z^2 - 20yz - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2y - 4z)^2 - 15\left(z + \frac{2}{3}y\right)^2 + \frac{20}{3}y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 1 \Rightarrow \text{单叶双曲面}$$